



TITLE:

# $C^*$ -algebraのstateの間の transition probability(作用素の不等 式とその周辺)

AUTHOR(S):

安藤, 毅

---

CITATION:

安藤, 毅.  $C^*$ -algebraのstateの間のtransition probability(作用素の不等式とその周辺). 数理解析研究所講究録 1983, 500: 36-45

ISSUE DATE:

1983-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103669>

RIGHT:

$C^*$ -algebra の state の間の transition probability

北大 応電研 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

Uhlmann [14] により導入された state の間の transition probability の性質は, Alberti [1], [2], Alberti-Uhlmann [3] また Raggio [12], Araki-Raggio [6] 等で説明されて来た。これ等を概観する。

**1. 定義と背景.** 量子力学系の純粋状態は適当に設定された Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の unit vector  $x$  で表示される。状態  $x_1$  から状態  $x_2$  への transition probability としては  $|(x_1, x_2)|^2$  を採用するのが妥当である。観測の対象となるのは適当に定められた,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  の  $C^*$ - (または von Neumann) sub-algebra の元と考える。この時, 各純粋状態  $x$  は  $\mathcal{A}$  上の positive unital な汎関数  $X \mapsto (Xx, x)$  を引き起こす。一般の positive unital な汎関数は上の形のものが重みつき平均になるので, これ等は混合状態に対応すると考え, 一般に positive unital な汎関数を state と呼ぶ。

以下  $\mathcal{O}$  を単位元  $1$  をもつ  $C^*$ -algebra とし,  $\varphi_1, \varphi_2$  をその上の state とする.  $\mathcal{O}$  の unital な  $*$ -表現  $\pi$  を考えよう. 即ち, Hilbert 空間  $\mathcal{H}_\pi$  の  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$  の中への  $*$ -表現である. このとき  $\mathcal{H}_\pi$  の unit vector  $x_i$  ( $i=1, 2$ ) が  $\varphi_i$  ( $i=1, 2$ ) に対して条件 (#) を満たすとは次のことをとする.

$$(\#) \quad \varphi_i(X) = (\pi(X)x_i, x_i) \quad \forall X \in \mathcal{O} \quad (i=1, 2).$$

歴史的には Bures [7] は  $\varphi_1, \varphi_2$  の距離を

$$\text{dist}_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) := \inf_{\pi} \inf_{\substack{x_1, x_2 \\ (\#)}} \|\pi(x_1) - \pi(x_2)\|$$

で定義した. これとの関連で Uhlmann [14] は  $\varphi_1, \varphi_2$  の間の transition probability を

$$P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{\pi} \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ (\#)}} |(\pi(x_1), \pi(x_2))|^2$$

とした. すなわち  $*$ -表現で  $\varphi_1, \varphi_2$  を pure state に移し可能な限り従来 transition probability を大きくするものを採用した. 定義から明かに次が成り立つ

$$\text{dist}_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)^2 = 2\{1 - P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

2. 多変量解析からの問題. 上のように対象の間の距離や重なり具合を極値で定義するのは, いろいろな分野で起る. その一例を多変量解析に見よう.

$\mathbb{R}^n$  上の 2 つの分布関数  $\Phi_1(t_1, \dots, t_n), \Phi_2(t_1, \dots, t_n)$  に対してその距離を Fréchet [10] は次の様に定義した.  $X_1, X_2$  をそれ

どれ  $\Phi_1, \Phi_2$  を分布関数にもつ (同じ確率空間上) の random  $n$ -vector とする, すなわち次の条件を満たすものである.

$$(*) \quad P\{X_{ij} \leq t_j \mid j=1, \dots, n\} = \Phi_i(t_1, \dots, t_n) \quad \forall t_j \in \mathbb{R} \quad i=1, 2$$

ここで  $X_1 = (X_{1,1}, \dots, X_{1,n})^t$ ,  $X_2 = (X_{2,1}, \dots, X_{2,n})^t$  である.

$$\text{dist}(\Phi_1, \Phi_2) = \inf_{X_1, X_2 (*)} \{E|X_1 - X_2|^2\}^{1/2}.$$

明らかに

$$E|X_1 - X_2|^2 = E(X_1^* X_1) + E(X_2^* X_2) - 2E(X_2^* X_1)$$

で  $E(X_i^* X_i)$  は分布関数  $\Phi_i$  だけで定ってしまうが  $E(X_2^* X_1)$  は変りうる. 従って  $\sup_{(*)} E(X_2^* X_1)$  が問題になるのだが, 一般にこれを決定するのはむずかしい. しかし, 次の様な特別の場合がある. これは Gaussian な random  $n$ -vector はその平均 vector と分散行列で決まってしまう事に由来する.

(簡単のため)  $\Phi_1, \Phi_2$  を平均 vector = 0 の Gaussian 分布とする. この時  $n \times n$  半正定値行列  $A := E(X_1 X_1^*)$ ,  $B = E(X_2 X_2^*)$  は  $X_i$  ( $i=1, 2$ ) が  $(*)$  を満たすときは  $\Phi_i$  ( $i=1, 2$ ) により確定する.  $C := E(X_1 X_2^*)$  とすると  $2n \times 2n$  行列

$\begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix}$  は半正定値になる. 逆に  $A, B \geq 0$  を与えて, 実  $C$  が  $\begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \geq 0$  を満足すると Gaussian な random  $2n$ -vector  $Z$  があり  $E(Z Z^*) = \begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix}$  となる.  $Z$  の先頭の  $n$ -component を  $X_1$ , 末尾の  $n$ -component を  $X_2$  とするとそれ等は共に Gaussian な random  $n$ -vector で  $X_1$  の分布関数は

が  $\Phi_1, \chi_2$  の分布関数 が  $\Phi_2$  となる. 従って, 次が成り立つ.

$$\text{dist}(\Phi_1, \Phi_2)^2 = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) - 2 \sup_{\substack{C, \begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \geq 0}} \text{tr}(C)$$

このことの関連で次の事が知られている.

**定理 1.**  $A, B$  を半正定値 (複素)  $n \times n$  行列とする.

(1) (Olkin-Pukelsheim [11], Dowson-Landau [8])

$$\max_{\begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \geq 0} |\text{tr}(C)|^2 = \text{tr}((B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^2$$

(2) (Flanders [9], Anderson-Olkin [4], Olkin-Pukelsheim [11])

$$\begin{aligned} \inf_{S > 0} \text{tr}(AS) \cdot \text{tr}(BS^{-1}) &= \inf_{S > 0} \left\{ \frac{\text{tr}(AS) + \text{tr}(BS^{-1})}{2} \right\}^2 \\ &= \text{tr}((B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^2. \end{aligned}$$

3. transition probability の表示. 定理 1 と関連して,  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  の 2 つの state  $\varphi_1, \varphi_2$  の transition probability の  $*$ -表現をおもてく出さない intrinsic な表示を考えよう.

**定理 2.** (Alberti [1], [2])

$$(1) \quad P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \sup \left\{ |\psi(1)|^2 : \psi \in \mathcal{A}^* \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \varphi_1(A^*A) & \psi(A^*B) \\ \psi(B^*A) & \varphi_2(B^*B) \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \\ \forall A, B \in \mathcal{A}$$

$$(2) \quad P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \inf \{ \varphi_1(S) \varphi_2(S^{-1}) : 0 < S \in \mathcal{A} \}$$

証明の概略を示す前に、この定理から導かれる幾つかの結果について述べよう。まず(1)より

系1. 写像  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \mapsto P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)^{\frac{1}{2}}$  は state の集合の直積の上で jointly concave, すなわち  $0 \leq \lambda \leq 1$  のとき

$$P_\alpha(\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi'_1, \lambda\varphi_2 + (1-\lambda)\varphi'_2)^{\frac{1}{2}} \geq \lambda P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)^{\frac{1}{2}} + (1-\lambda)P_\alpha(\varphi'_1, \varphi'_2)^{\frac{1}{2}}.$$

$C^*$ -algebra の second dual  $\mathcal{O}^{**}$  は von Neumann algebra であり  $\varphi_1, \varphi_2$  は  $\mathcal{O}^{**}$  上の normal な state に拡大出来るが、

系2.  $P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = P_{\alpha^{**}}(\varphi_1, \varphi_2).$

次に、もう一つの  $C^*$ -algebra  $\mathcal{B}$  から  $\mathcal{O}$  への unital な positive linear map  $\Phi$  が与えられた場合を考える。  $\varphi_i \circ \Phi$  ( $i=1, 2$ ) は  $\mathcal{B}$  の state となる。  $\Phi$  に対する Kadison 型不等式の1つ  $\Phi(S^{-1}) \geq \Phi(S)^{-1}$  を使うと、定理2の(2)より次が出る。

系3.  $\mathcal{B} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}$  が unital positive のとき

$$P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \leq P_{\mathcal{B}}(\varphi_1 \circ \Phi, \varphi_2 \circ \Phi).$$

4. 定理2の(1)の証明の概略. 不等式  $\leq$  は容易である。

すなわち、(1)を満たす  $\pi, x_1, x_2$  を考え  $\psi(X) := (\pi(X)x_1, x_2)$  とすると、  $(x_1, x_2) = \psi(1)$  で、また Schwarz の不等式から

$$|\psi(B^*A)|^2 \leq \|\pi(A)x_1\|^2 \|\pi(B)x_2\|^2 = \varphi_1(A^*A) \cdot \varphi_2(B^*B).$$

不等式  $\geq$  を見るため、(1)を満たす  $\pi, x_1, x_2$  を固定する。

$\varphi_1, \varphi_2$  に対し問題の条件を満足する  $\psi \in \mathcal{O}^*$  は必ず  $\exists K$  s.t.

$\|K\| \leq 1$ ,  $K \in \pi(\mathcal{O})'$  commutant in  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$  を使って

$$\psi(X) = (K \pi(X) x_1, x_2) \quad \forall X \in \mathcal{O}$$

とかける. 逆も真である.  $\pi(\mathcal{O})'$  で  $\|K\| \leq 1$  のものは unitary の加重平均とかけるから, 結局局次がわかる

$$\sup \{ |(U x_1, x_2)|^2 : U \in \pi(\mathcal{O})' \text{ unitary} \} = (1) \text{ の右辺.}$$

明かに  $\pi, U x_1, x_2$  も (#) を満たすから,  $P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \geq (1) \text{ の右辺}$  となる. ■

この証明から明かなように.

系 4. (#) を満たす  $\pi, x_1, x_2$  をどのようにえらんでも

$$P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = \max \{ |(U x_1, x_2)|^2 : U \in \pi(\mathcal{O})', \text{ unitary} \}.$$

5. transition probability の具体的な計算. 定理 1 に対して次の様なことがわかる.

(a)  $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$  のとき.  $\varphi_i$  は trace class operator  $0 \leq A_i$  を使って  $\varphi_i(X) = \text{tr}(A_i X)$  ( $i=1,2$ ) とかける.  $\mathcal{H}_\pi$  を Hilbert-Schmidt class  $\pi$  を左か右の multiplication  $x_i$  として  $A_i^{\frac{1}{2}}$  をとると (#) がみたされる. この時  $\pi(\mathcal{O})'$  は右か右の multiplication の全体となり, 系 4 より

$$P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{U: \text{unitary}} |\text{tr}(A_2^{\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} U)|^2 = \text{tr}((A_2^{\frac{1}{2}} A_1 A_2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^2.$$

(b)  $\exists$  state  $\varphi$   $\exists A_i \in \mathcal{O}$  で  $\varphi_i(X) = \varphi(A_i^* X A_i)$  ( $i=1,2$ )

と書け, 更に  $A_2^* A_1 \geq 0$  ならば,  $\varphi$  に関して GNS-表現  $\pi$  を作り,  $\varphi(X) = (\pi(X)x, x) \quad \forall X \in \mathcal{O}$  とすると,  $x_i = \pi(A_i)x$  として  $\pi, x_1, x_2$  は (#) を満たす. 以下系 4 を使って

$$P_\sigma(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi(A_2^* A_1)^2$$

が成る. この特別な場合として

(c)  $\sigma \leq \tau \in \mathcal{O}$  s.t.  $\varphi_2(X) = \varphi_1(\tau X \tau) \quad \forall X \in \mathcal{O}$  なる

$$P_\sigma(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1(\tau)^2.$$

(d)  $\mathcal{O}$  が可換な von Neumann algebra で  $L^\infty(\Omega, \mu)$   $\mu(\Omega)=1$  と同一視されるとき,  $\varphi_1, \varphi_2$  が  $\mathcal{O}$  の normal な state なら  $L^\infty(\Omega, \mu)$  の上では  $0 \leq f_i \in L^1(\Omega, \mu)$  で表現される, i.e.  $\varphi_i(g) = \int g f_i d\mu \quad \forall g \in L^\infty(\Omega, \mu)$ . この時  $\sigma = L^\infty(\Omega, \mu)$  の  $L^2(\Omega, \mu)$  の上の multiplication での表現  $\pi$  を考えたと  $x_i$  として  $f_i^{1/2}$  をとると  $\pi, x_1, x_2$  は (#) を満たす.  $L^\infty$  が maximal Abelian により  $\pi(\mathcal{O}) = \pi(\mathcal{O})'$  となり, 系 4 より

$$\begin{aligned} P_\sigma(\varphi_1, \varphi_2) &= \sup \left\{ \left| \int g f_1^{1/2} f_2^{1/2} d\mu \right|^2 : g \in L^\infty(\Omega, \mu) \text{ unimodular} \right\} \\ &= \left\{ \int f_1^{1/2} f_2^{1/2} d\mu \right\}^2. \end{aligned}$$

6. 定理 2 の (2) の証明の概略. 不等式  $\leq$  は (1) で

$$A = S^{1/2}, B = S^{-1/2} \text{ ととって } |\psi(\mathbb{1})|^2 = |\psi(S^{1/2} S^{-1/2})|^2 \leq \varphi_1(S) \varphi_2(S^{-1/2}).$$

逆の不等式を出すには 系 2 を使って, density theorem を考



度する、 $\mathcal{A}$  は von Neumann algebra,  $\varphi_1, \varphi_2$  は normal な state としてよい。また必要なら  $0 < \varepsilon < 1$  を parameter として  $\frac{\varphi_1 + \varepsilon \varphi_2}{1 + \varepsilon}$  を  $\varphi_1$  の代りに考えることにより,  $\varphi_1$  は最初から,  $\exists \lambda > 0$   $\alpha \varphi_1(X) \geq \varphi_2(X) \quad \forall 0 \leq X \in \mathcal{A}$  と仮定してよい。

Sakai [13] の non-linear Radon-Nikodym theorem によれば  $\exists 0 \leq T \in \mathcal{A}$  s.t.  $\varphi_2(X) = \varphi_1(TXT) \quad \forall X \in \mathcal{A}$ .

従って (c) より  $P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1(T)^2$ .  $T$  の spectral projection  $E_t$  は全て  $\mathcal{A}$  に属するので  $\mathcal{B} =$  v. Neumann alge spanned  $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$  として,  $\mu(t) = \varphi_1(E_t)$  として  $\mathcal{B}$  は  $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mu)$  と考えられ。 $\varphi_1$  は  $1 \in L^1(\mathbb{R}_+, \mu)$  として また  $\varphi_2$  は  $t^2 \in L^1(\mathbb{R}_+, \mu)$  として表現されるので (d) より

$$P_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \varphi_2) = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} t d\mu(t) \right\}^2 = \inf_{0 < f \in L^\infty} \left\{ \int t^2 f(t)^2 d\mu \right\} \left\{ \int f(t) d\mu \right\}$$

従って

$$P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = P_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \varphi_2) \geq \inf_{0 < S \in \mathcal{A}} \varphi_1(S) \varphi_2(S^{-1})$$

が成る。■

## 7. transition probability と Radon-Nikodym 型定理

ここでは Sakai の Radon-Nikodym 型定理を利用して, transition probability の表示 (2) を求めたが, Araki [5] は逆に極値を与える  $\pi, \alpha_1, \alpha_2$  に着目し, これから一般の Radon-Nikodym 型定理を導出し, それに基づいて Araki-Raggio [6]

は,  $\mathcal{A}$  が von Neumann algebra,  $\varphi_1, \varphi_2$  が normal state  
 のとき, 可換な von Neumann subalgebra  $\mathcal{B}$  があり  $P_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \varphi_2) =$   
 $P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2)$  となることを示した. その基本的な考えは次のよう  
 な所にある.  $\pi, x_1, x_2$  で (#) を満たし実際に  $P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2)$  を attain  
 するものとする, すなわち  $P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2)^{\frac{1}{2}} = (x_1, x_2)$ . この極値性  
 から容易に,  $(Sx_1, x_2) \geq 0 \quad \forall 0 \leq S \in \pi(\mathcal{A})'$  が導かれる.  
 (簡単のため  $x_1, x_2$  を  $\pi(\mathcal{A})$  に関し cyclic, separating  
 とする)  $Sx_1 \mapsto Sx_2 \quad (\forall S \in \pi(\mathcal{A})')$  は  $\mathcal{H}_{\pi}$  で densely  
 defined な symmetric positive な作用素となる. また  
 $\pi(\mathcal{A})'$  と可換である. この作用素の Friedrichs 拡大  $T$  は  
 (一般に unbounded) な positive selfadjoint 作用素でその  
 spectral projection  $E_t$  は  $\pi(\mathcal{A})$  に属する. この時作り方から  
 $\varphi_2(X) = \varphi_1(TXT) \quad \forall X \in \mathcal{A}$  となる. 以下, technical に  
 は少し複雑であるが, 前と同様に議論できる.

## 8. 文献

- [1] Alberti, P.M., Wachsende Übergangswahrscheinlichkeiten und vollstän-  
 dige positive stochastische Transformationen, Wiss. Zeit. Karl Marx Univ.  
 31(1982), Heft 1, 3-10.
- [2] Alberti, P.M., A note on the transition probability over  $C^*$ -algebras,  
 Lett. in Math. Phys. 7(1983), 25-33.
- [3] Alberti, P.M. and A. Uhlmann, Stochastic linear maps and transition  
 probability, Lett. in Math. Phys., 7(1983), 107-112.

- [4] Anderson, T.W. and I. Olkin, An extremal problem for positive definite matrices, *Linear and Multilinear Alg.*, 6(1978), 257-262.
- [5] Araki, H., Bures distance function and a generalization of Sakai's non-commutative Radon-Nikodym theorem, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 8(1972/73), 335-362.
- [6] Araki, H. and G.A. Raggio, A remark on transition probability, *Lett. Math. Phys.*, 6(1982), 237-240.
- [7] Bures, D., An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite  $W^*$ -algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 135(1969), 119-212.
- [8] Dowson, D.C. and B.V. Landau, The Frechet distance between multivariate normal distributions, *J. Multivariate Anal.*, 12(1982), 450-455.
- [9] Flanders, H., An extremal problem on the space of positive definite matrices, *Linear and Multilinear Alg.*, 3(1975), 33-39.
- [10] Fréchet, M., Sur la distance de deux lois de probabilité, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 244(1957), 689-692.
- [11] Olkin, I. and H. Pukelsheim, The distance between two random vectors with given dispersion matrices, *Linear Alg. Appl.*, 48(1982), 257-263.
- [12] Raggio, G.A., Comparison of Uhlmann's transition probability with the one induced by the natural positive cone of von Neumann algebras in standard form, *Lett. Math. Phys.*, 6(1982), 233-236.
- [13] Sakai, S., A Radon-Nikodym theorem in  $W^*$ -algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71(1965), 149-151.
- [14] Uhlmann, A., The 'transition probability' in the state space of a  $*$ -algebra, *Rep. Math. Phys.*, 9(1976), 273-279.